

16/02/15

ΘΕΩΡΗΜΑ: Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Αρχή Καλής Διατάξης (ΑΚΔ): Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο: αν $S \subseteq \mathbb{N}$ κ' $S \neq \emptyset$, τότε $\exists b \in S : b \leq s, \forall s \in S$.

(ii) Αρχή Μαθηματικής επαγωγής (ΑΜΕ): Έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ ώστε να ισχύουν τα εξής:

(α) $1 \in S$

(β) $\forall n \in \mathbb{N} : n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$.

Τότε: $S = \mathbb{N}$.

Απόδειξη: $(ΑΚΔ) \Rightarrow (ΑΜΕ)$. Έστω ότι ισχύει η $(ΑΚΔ)$ κ' έστω $S \subseteq \mathbb{N}$ έτσι ώστε: (α) $1 \in S$ κ' (β) $\forall n \in \mathbb{N}, n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$. Θ.δ.ο. $S = \mathbb{N}$.

Υποθ. ότι $S \neq \mathbb{N}$. Τότε $\mathbb{N} - S \neq \emptyset$. Από την (ΑΚΔ) έπεται ότι το $(\mathbb{N} - S)$ έχει ελάχιστο στοιχείο: $l = \min(\mathbb{N} - S)$.

Αν $l=1$, τότε $1 \in (\mathbb{N} - S)$ άτοπο! Διότι $1 \in S$.

Άρα $l \neq 1 \Rightarrow l > 1 \Rightarrow (l-1) \in \mathbb{N}$ κ' $1 \leq l-1 < l \Rightarrow$

$\Rightarrow (l-1) \notin (\mathbb{N} - S)$ διότι διαφορετικά αν $(l-1) \in (\mathbb{N} - S)$ θα καταλήγαμε σε άτοπο διότι $l = \min(\mathbb{N} - S)$.

Άρα $(l-1) \notin (\mathbb{N} - S)$ κ' άρα $(l-1) \in S$

Από την υπόθεση (β) $\Rightarrow \begin{cases} 1 \in S \\ (l-1) \in S \end{cases} \Rightarrow (1+l-1) \in S \Rightarrow l \in S$
ΑΤΟΠΟ

Διότι εκ κατασκευής: $l \in (\mathbb{N} - S)$

άρα $S \neq \mathbb{N}$ ΑΤΟΠΟ $\Rightarrow \boxed{S = \mathbb{N}}$.

$(ΑΜΕ) \Rightarrow (ΑΚΔ)$: Έστω ότι ισχύει (ΑΜΕ) κ' έστω $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$.
Θ.δ.ο. το S έχει $\min$.

Έστω ότι το S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο:

$$T = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n \Rightarrow k \notin S \right\} \quad (\text{αφού } S \subseteq \mathbb{N}_{1=\min}^{k'}$$

- $1 \in T$, ~~και~~ ισοδύναμα: $1 \notin S$, διότι αν $1 \in S \Rightarrow 1 = \min S$
 άρα διότι υποθέτουμε ότι το S
 δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ ~~και~~ $n \in T \Rightarrow 1, 2, 3, \dots, n \notin S$
 Αν $(n+1) \in S$ τότε το $(n+1)$ θα ήταν το ελάχιστο
 στοιχείο του S διότι οι $1, \dots, n \notin S$ άρα άρα από
 την υπόθεση ότι το S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Άρα $(n+1) \notin S$ κ' επομένως $(n+1) \in T$, διότι: $1, 2, \dots, n, n+1 \notin S$.

Άρα από (ΑΜΕ) $\Rightarrow T = \mathbb{N}$. Τότε $S = \emptyset$, το οποίο είναι
 άρα διότι υποθ. ότι $S \neq \emptyset$.

Άρα $\rightarrow$ πράγματι το S έχει ελάχιστο στοιχείο (αφού
 στο άνω παρατήρησε έχοντας υποθέσει ότι το αντίθετο)
 επομένως ισχύει η (ΑΚΔ).

$$\text{ΑΣΚΗΣΗ 1} : (ΑΜΕ) : \text{αν } S \subseteq \mathbb{N} \text{ κ' } \left. \begin{array}{l} \textcircled{a} \exists \epsilon \in S \\ \textcircled{b} \forall n \in \mathbb{N}, : n \in S \Rightarrow (n+1) \in S \end{array} \right\} \Rightarrow S = \mathbb{N}.$$

$$(ΑΜΕ)' : \text{αν } S' \subseteq \mathbb{N} \text{ κ' } \left. \begin{array}{l} \textcircled{a} \exists \epsilon \in S' \\ \textcircled{b} \forall n \geq 1 : 1 \leq m \leq n : m \in S' \Rightarrow n \in S' \end{array} \right\} \Rightarrow S' = \mathbb{N}.$$

$$\text{ΝΟ} (ΑΜΕ) (=) (ΑΜΕ)'.$$

(ΑΜ) Αρχή Μεγίστου: Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο
 του $\mathbb{N}$. Τότε αυτό έχει μέγιστο στοιχείο.

Δηλαδή, αν $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$ κ' $\exists n \in \mathbb{N} : s \leq n, \forall s \in S$ τότε:
 $\exists b \in S : s \leq b, \forall s \in S$.

$$(ΑΚΔ) \stackrel{\text{ΘΕΩΡ}}{=} (ΑΜΕ) \stackrel{\text{ΑΣΚ}}{=} (ΑΜΕ)' \stackrel{\textcircled{*}}{=} (ΑΜ).$$

Από τώρα ε' στο εξής δεχόμαστε ότι ισχύει οποιαδήποτε
 από τις παραπάνω ισοδύναμες προτάσεις.

Θεώρημα 1: Έστω $P(n)$: πρόταση η οποία εξαρτάται από τον $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει μία από τις παρακάτω υποδ.

(A): • η πρόταση $P(1)$ είναι αληθής ($\equiv$ ισχύει).

• $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ είναι αληθής} \Rightarrow P(n+1) \text{ αληθής.}$

(B): • η πρόταση $P(1)$ είναι αληθής.

• $\forall n \geq 1 \text{ κ' } 1 \leq m < n : P(m) : \text{αληθής} \Rightarrow P(n) : \text{αληθής}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Τότε η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ανάλυση: $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) : \text{αληθής}\}$

Τότε $1 \in S$ διότι η πρόταση $P(1)$ είναι αληθής (υποθέτουμε).
Επίσης αν $n \in S$ τότε η πρόταση $P(n)$ αληθής.

(A) $\Rightarrow P(n+1)$ αληθής $\Rightarrow (n+1) \in S$. Από την (ΑΜΕ) $\Rightarrow$
 $S = \mathbb{N}$ κ' άρα $P(n) : \text{αληθής}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Παρόμοια για το (B)

Θεώρημα 1: Έστω $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > 1$ κ' έστω $P(n)$ πρόταση η οποία εξαρτάται από το $n \geq n_0$. Υποθέτουμε ότι:

(α) $P(n_0) : \text{αληθής}$

(β) $\forall n > n_0 : \text{αν } P(n) : \text{αληθής} \Rightarrow P(n+1) \text{ αληθής.}$

$\Rightarrow$ Τότε η $P(n)$ είναι αληθής $\forall n \geq n_0$.

Ανάλυση: Έστω $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \text{ κ' } P(n) : \text{ψαδής}\}$

Θ.δ.ο. $S = \emptyset$.

Έστω $S \neq \emptyset \xrightarrow{(AKN)} \text{το } S \text{ έχει ελάχιστο στοιχείο : } s$.

Τότε $s > n_0 > 1$. Τότε $(s-1) \in \mathbb{N}$ κ' $(s-1) \geq n_0$.

Θεωρούμε την πρόταση $P(s-1)$.

Ισχυρισμός: $P(s-1) : \text{αληθής}$ διότι διαφορετικά αν $P(s-1)$ ψαδής τότε

- αν $s-1 = n_0 \Rightarrow P(s-1) = P(n_0) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma$ ΑΤΟΝΟ (υπόθεση)

- αν $s-1 > n_0 \Rightarrow P(s-1) \in S$ ~~ΑΤΟΝΟ (υπόθεση)~~

ΑΤΟΝΟ διότι $\min S = s > (s-1) \in S$

Άρα $P(s-1)$ αληθής $\Rightarrow$ άρα $P(s) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma \Rightarrow s \in S$
ΑΤΟΝΟ

διότι $s = \min S$.

Υποθέτουμε ότι $S \neq \emptyset$ άρα θα ισχύει $S = \emptyset$.

Παραδείγματα:

① $\forall n \geq 1 : 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \therefore P(n)$.

Απόδειξη: Με χυμώση (AME):

• $P(1) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma$ διότι $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

• Έστω $P(n)$ αληθής όπου $n > 1$. Τότε:

$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \therefore P(n)$.

Τότε $1+2+\dots+n+(n+1) \stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$

$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \therefore P(n+1) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma$

(AME) $\Rightarrow P(n) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma, \forall n \geq 1$.

② $1+3+5+7+9+11+\dots+(2n-1) = ; (\forall n \geq 1)$ ~~n^2~~
 $= n^2$

• Για $n=1 \Rightarrow 1=1=1^2$

• $n=2 \Rightarrow 1+3=4=2^2$

• $n=3 \Rightarrow 1+3+5=9=3^2$

• $n=4 \Rightarrow 1+3+5+7=16=4^2$

$P(n), \forall n \geq 1$.

• $P(1) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma$

• Έστω ότι $n > 1$ & $P(n) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma$

δηλ $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

• $P(n+1) : 1+3+5+\dots+(2n-1) + (2(n+1)-1) =$

$= 1+3+5+\dots+2(n+1)-1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

άρα $P(n+1) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma$ (AME) $\Rightarrow P(n) : \alpha \lambda \eta \theta \acute{\upsilon} \varsigma, \forall n \geq 1$.

③ Ακολουθία Fibonacci: $(F_n)_{n \geq 1} : F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$.
 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$

Ισχυρισμός: $F_n < 2^n, \forall n \geq 1. : P(n)$

• $P(1)$: αληθής διότι $F_1 = 1 < 2^1 = 2$

• Έστω ότι $(n > 1) P(n)$: αληθής. Δηλ $F_k < 2^k$ ~~για~~
 για κάθε $k \in [1, n]$.^{5'}

Τότε $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < 2^n + 2^{n-1} < 2^n$

άρα από (ΑΜΕ) $\Rightarrow P(n)$: αληθής, $\forall n \geq 1$.

n -οστός όρος αλ. Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - b^n),$$

1,61803...

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leftarrow$ χρυσή
 τομή

$b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$